

## DIAGRAMAS DEL CÍRCULO

Estos diagramas permiten interpretar y visualizar el efecto de determinadas variables sobre la transmisión de energía por una línea.

Básicamente se trata de dos diagramas llamados “Diagrama del círculo del extremo receptor” y “Diagrama del círculo del extremo transmisor”. Un tercer diagrama llamado “Diagrama universal del círculo” permite sintetizar ambos en uno.

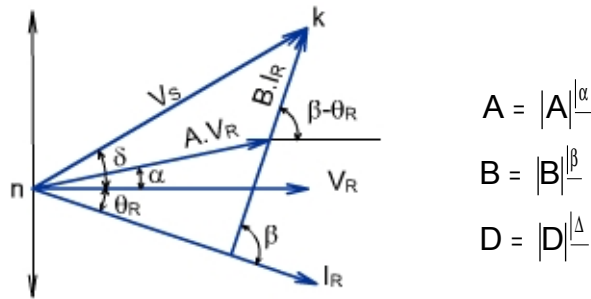
### a) DIAGRAMA DEL CÍRCULO DEL EXTREMO RECEPTOR

Para la construcción de ambos diagramas partimos de las ecuaciones generales de los cuadripolos con constantes generalizadas; las cuales expresan las relaciones de tensión y corriente entre ambos extremos de una línea.

$$(1) \quad V_S = A \cdot V_R + B \cdot I_R \quad V_R = D \cdot V_S - B \cdot I_S \quad (3)$$

$$(2) \quad I_S = C \cdot V_R + D \cdot I_R \quad I_R = C \cdot V_S + A \cdot I_S \quad (4)$$

A partir de la ecuación (1) podemos dibujar el siguiente diagrama vectorial. (Fig. 1)



**Fig. 1**

Donde: A, B, C, y D son las constantes generalizadas del cuadripolo representativo de línea y recordemos que cada una de ellas tienen un significado físico.

El diagrama vectorial de tensiones de la Fig.1 se puede convertir en un diagrama vectorial de potencias, multiplicándolo por una corriente. Con tal finalidad elegimos una corriente especial ( $\frac{V_R}{B}$ ) de manera que al multiplicar al diagrama vectorial de tensiones (Fig. 1) por esta corriente, uno de sus vectores ( $B \cdot I_R$ ) se convertirá en la potencia del extremo receptor.

$$B \cdot I_R \cdot \frac{V_R}{B} = V_R \cdot I_R$$

Es decir aparece la potencia del extremo receptor. Esto se ve reflejado en la Fig. 2

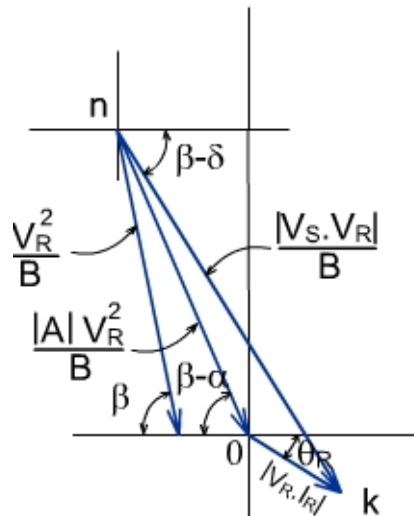


Fig. 2

Observemos que todos los vectores han girado un ángulo  $0 - \beta$  por cuanto a  $V_R$  lo hemos tomado como origen de fases.

En la Fig. 2 se puede observar que la proyección de  $V_R \cdot I_R$  sobre los ejes vertical y horizontal dan las potencias reactivas y activas en el extremo receptor, esto es:

$$P_R = V_R \cdot I_R \cdot \cos \theta_R \quad Q_R = V_R \cdot I_R \cdot \sen \theta_R$$

Por una cuestión simplemente formal adoptaremos para las potencias reactivas los siguientes signos: Positivo el reactivo tomado por una carga inductiva y negativo el reactivo tomado por una carga capacitiva. Por lo tanto para estar de acuerdo con esta convención, rebatiremos el diagrama de potencias  $180^\circ$  sobre el eje horizontal resultando el diagrama de la Fig. 3. en el cual interpretamos las proyecciones sobre el eje de ordenadas en VA<sub>reactivos</sub> y las proyecciones sobre el eje horizontal en Watt

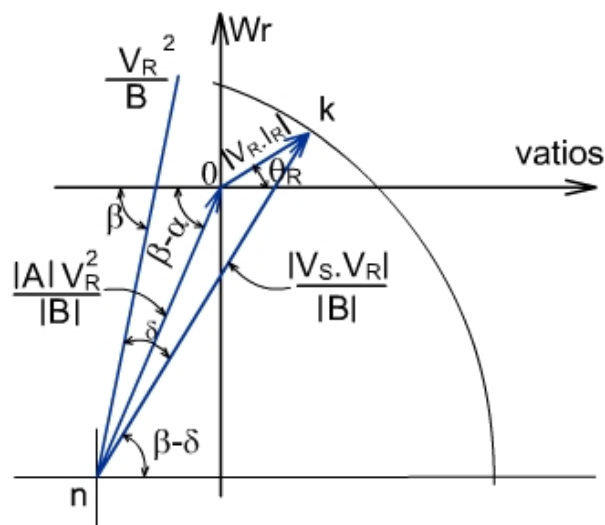


Fig. 3

Veamos ahora algunas interpretaciones del diagrama del círculo de potencia del extremo receptor mostrado en la Fig. 3

- Para valores de  $V_S$  y  $V_R$  tales que su producto permanezca constante el punto k de la Fig. 3 se desplazará; para otras condiciones de carga; sobre una circunferencia con centro en el punto n. Esto dará lugar a que el ángulo de potencia  $\delta$  varíe. Existirá un valor de  $\delta_{\max}$  para el cual la potencia activa es máxima, esto significa que superado este ángulo la potencia activa comienza a disminuir.
- Para otro valor de  $V_S$  manteniendo  $V_R = \text{cte}$ , el punto de funcionamiento se trasladará a otra circunferencia con centro en el mismo punto n.
- El diagrama nos da potencias y tensiones de fase. Si quisiéramos los valores trifásicos habría que multiplicar por 3, lo que equivale a tomar tensiones compuestas tanto para  $V_S$  como  $V_R$ .

El radio del círculo del extremo receptor valdrá:  $V_S \cdot \frac{V_R}{B} [VA]$

Las coordenadas del centro del círculo del extremo receptor valdrán:

$$\text{Horizontal} = - \frac{|A|}{|B|} \cdot V_R^2 \cdot \cos(\beta - \alpha) [W]$$

$$\text{Vertical} = - \frac{|A|}{|B|} \cdot V_R^2 \cdot \sin(\beta - \alpha) [Wr]$$

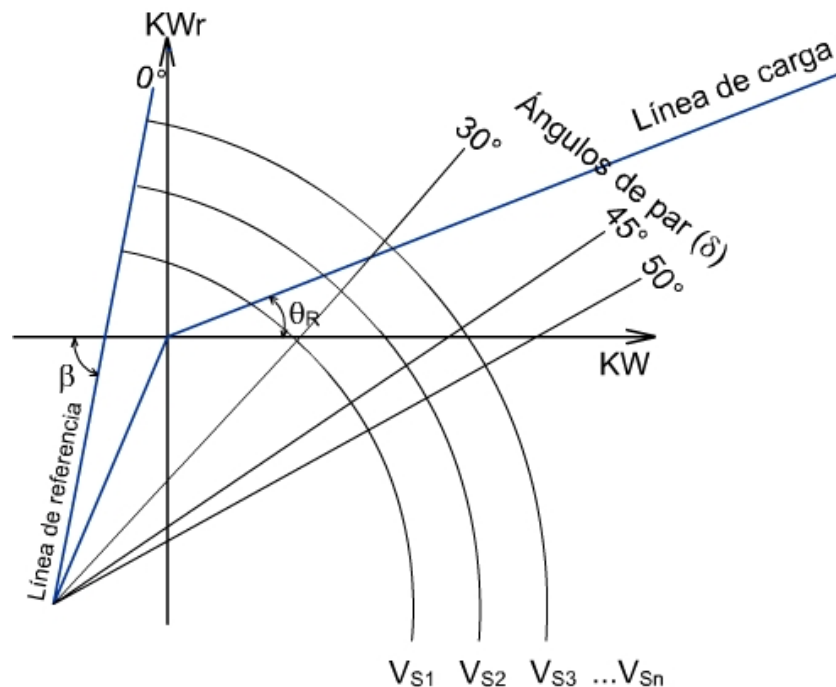


Fig. 4

En la Fig. 4; correspondiente también a un diagrama del círculo del extremo receptor; podemos apreciar algunas líneas características como la línea de carga, que corresponde al lugar geométrico de los puntos de funcionamiento (k) y que corresponden a una  $V_R = \text{cte}$  y  $\cos \phi_R = \text{cte}$  (Factor de potencia de la carga cte.)

b) DIAGRAMA DEL CIRCULO DEL EXTREMO TRANSMISOR

A partir de la ecuación (3)  $V_R = D \cdot V_S - B \cdot I_S$  podemos dibujar el siguiente diagrama vectorial de tensiones:

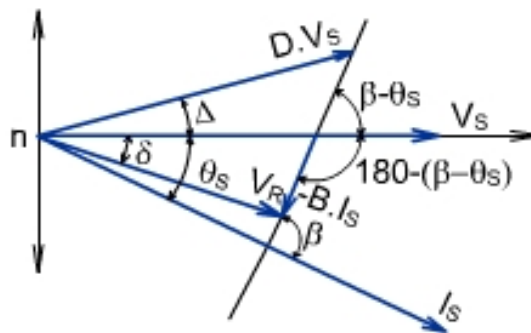


Fig. 5

Procediendo igual que con el diagrama de potencias del extremo receptor, multiplicaremos por una corriente para transformarlo en un diagrama de potencias.

En este caso la corriente elegida será  $-\frac{V_S}{B}$ , lo que equivale a multiplicar cada uno

de los vectores por el módulo de  $-\frac{V_S}{B}$  y girar cada vector un ángulo de  $(180 - \beta)$ .

El nuevo diagrama resultante será:

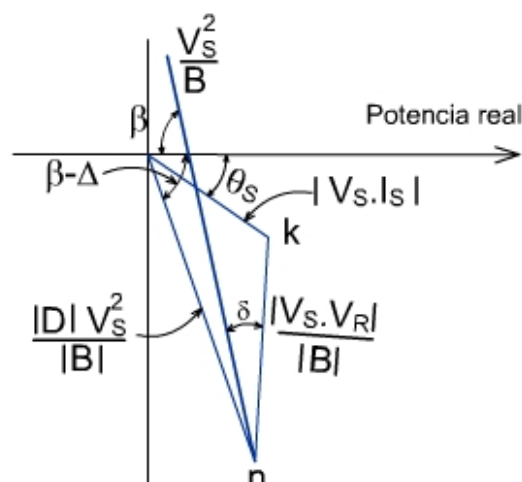


Fig. 6

Al igual que en el caso del diagrama del círculo del extremo receptor, para seguir con la convención de signos de las potencias reactivas inductivas y capacitivas,

deberíamos rebatir  $180^\circ$  el diagrama alrededor del eje horizontal, obteniendo el siguiente diagrama:

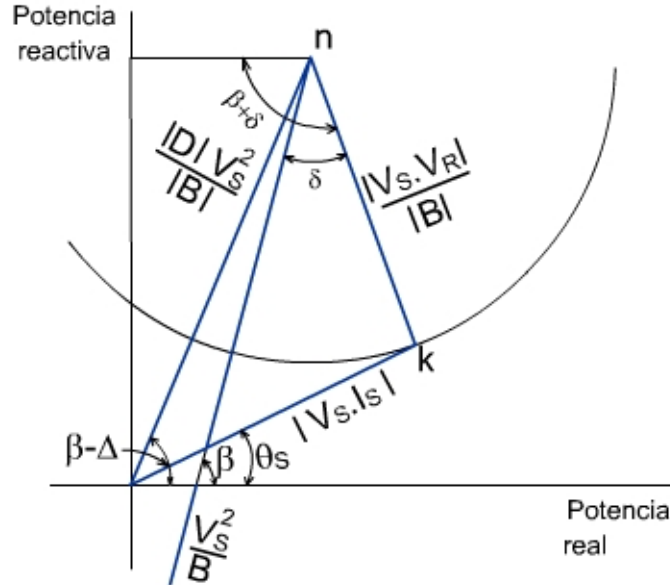


Fig. 7

### POTENCIA TRANSMITIDA POR UNA LÍNEA DE TRANSPORTE

Observando los diagramas del círculo del extremo receptor (Fig. 3) y del extremo transmisor (Fig. 7), y considerando los triángulo onk podemos proyectar la suma de (nk –on) sobre el eje horizontal de manera de obtener las potencias activas del extremo receptor y del extremo transmisor, resultando las siguientes expresiones:

$$P_R = \frac{|V_S \cdot V_R|}{|B|} \cdot \cos(\beta - \delta) - \frac{|A| \cdot V_R^2}{|B|} \cdot \cos(\beta - \alpha) \quad \text{Ec. 1}$$

$$P_S = - \frac{|V_S \cdot V_R|}{|B|} \cdot \cos(\beta + \delta) + \frac{|D| \cdot V_S^2}{|B|} \cdot \cos(\beta - \Delta) \quad \text{Ec. 2}$$

Del análisis de la expresión Ec. 1 vemos que la máxima potencia del extremo receptor se obtiene cuando  $\beta = \delta^\circ$ . A su vez del análisis de la expresión Ec. 2, la máxima potencia del extremo transmisor se obtiene cuando  $\beta + \delta = 180^\circ$ .

Como normalmente en los sistemas de transmisión la resistencia de la línea es muy pequeña en comparación con la reactancia inductiva, la primera suele despreciarse haciendo que  $\beta = 90^\circ$ . Este supuesto nos permite decir en consecuencia que la potencia máxima transmitida corresponderá a un ángulo  $\delta = 90^\circ$ . Como veremos posteriormente al estudiar estabilidad de sistemas nunca se alcanza este ángulo.

### c) DIAGRAMA UNIVERSAL DEL CIRCULO

Este diagrama resulta de la reunión de los diagramas vistos, y permite leer en un solo diagrama los valores de las más importantes variables del extremo transmisor y del extremo receptor.

Fue a partir de estos gráficos que se realizaron en forma sistemática los primeros estudios de flujo de potencia en sistemas muy simples. Tal el caso del sistema mendocino Nihuil- Agua del Toro-Cruz de Piedra.

Para construir este diagrama se toma como punto de partida los diagramas de las Fig. 3 y 6

La particularidad de este diagrama es que todos los valores a representar están expresados en valores por unidad (pu), referidos a una potencia base  $\frac{V^2}{B}$ , donde

V es la tensión nominal de la línea en estudio B la impedancia serie de la misma.

En consecuencia los números que resultan de dividir los valores del diagrama original por  $\frac{V^2}{B}$  son números adimensionales a saber:

- Radio del círculo del extremo receptor y transmisor =  $\frac{V_S}{|V|} \cdot \frac{V_R}{|V|} \text{ [pu]}$   
las coordenadas de  $O_R$  y  $O_S$  valen:
- Horizontal ( $O_R$ ) =  $-|A| \cdot \frac{V_R^2}{V} \cdot \cos(\beta - \alpha) \text{ [pu]}$
- Vertical ( $O_R$ ) =  $-|A| \cdot \frac{V_R^2}{V^2} \cdot \sin(\beta - \alpha) \text{ [pu]}$
- Horizontal ( $O_S$ ) =  $-|D| \cdot \frac{V_S^2}{V^2} \cdot \cos(\beta - \Delta) \text{ [pu]}$
- Vertical ( $O_S$ ) =  $-|D| \cdot \frac{V_S^2}{V^2} \cdot \sin(\beta - \Delta) \text{ [pu]}$

Cabe destacar que al unir ambos diagramas con un centro de circunferencias común, en la parte del diagrama correspondiente al extremo transmisor las potencias reactivas inductivas se leen al revés que en el extremo receptor, lo cual no impide la correcta interpretación de los resultados.

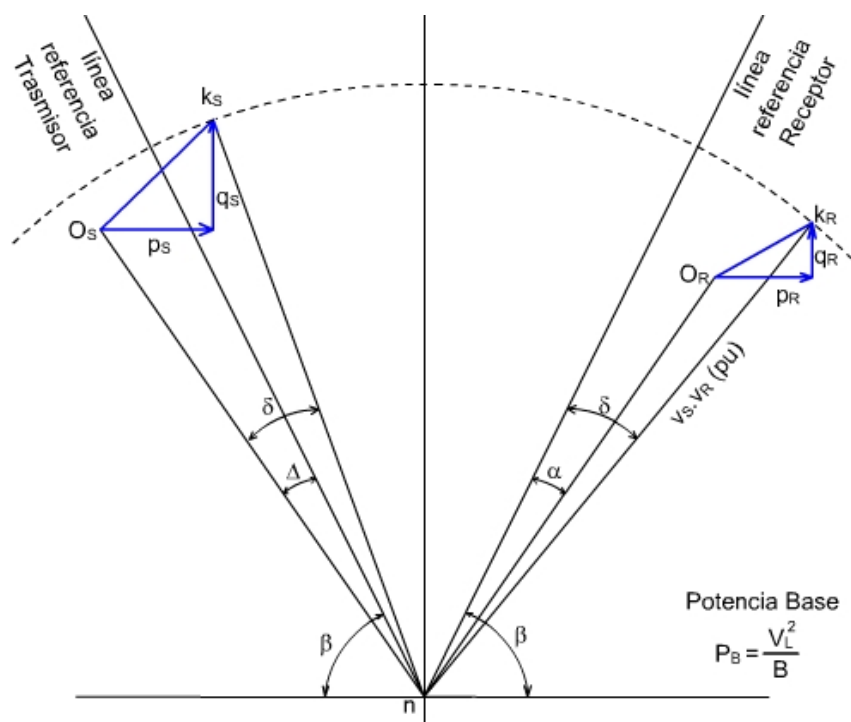


Fig. 8

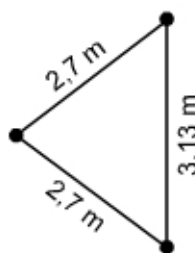
### Ejemplo Línea de 132 KV: Florentino Ameghino – Comodoro Rivadavia

#### Características

$$x = 0,38 \frac{\Omega}{\text{Km}}$$

$$r = 0,097 \frac{\Omega}{\text{Km}}$$

$$l = 320 \text{ Km}$$



$$D_m = \sqrt[3]{2,7 \cdot 2,7 \cdot 3,13} = 2,84 \text{ m}$$

$$c_s = \frac{0,02413 \cdot 10^{-6}}{\log \frac{D_m}{r_0}} = \frac{0,02413 \cdot 10^{-6}}{\log \frac{2,84}{0,0121}} = \frac{0,02413 \cdot 10^{-6}}{2,73} = 0,0102 \cdot 10^{-6} \frac{\text{F}}{\text{Km}}$$

$$b = \omega \cdot c_s = 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 0,0102 \cdot 10^{-6} = 3,19 \cdot 10^{-6} \frac{\text{S}}{\text{Km}}$$

#### Cálculo de las constantes A; B y C

$$X = 0,38 \cdot 320 = 122 \Omega$$

$$R = 0,097 \cdot 320 = 31 \Omega$$

$$B = 3,19 \cdot 10^{-6} \cdot 320 = 102 \cdot 10^{-5} \text{ S}$$

$$A = 0,938381 + j0,015484 = 0,9385 \angle 0,945^\circ$$

$$B = 29,725818 + j119,64575 = 123,28313 \angle 76,05^\circ$$

$$C = -0,000053 + j0,000999 = 0,000999 \angle 90,3^\circ$$

#### Datos para la construcción del diagrama del círculo

**Líneas de referencia del extremo transmisor y receptor:** Se trazan de acuerdo al gráfico con el ángulo  $\beta = 76,05^\circ$

**Líneas de centro:** Se trazan tomando el ángulo  $\alpha = 0,945^\circ$  desde las líneas de referencia.

**Radio de los círculos:** Se trazan círculos con radios  $V_S \cdot V_R$  en valores por unidad.

#### Interpretación de los resultados de acuerdo a los datos

$$1) V_R = 141 \text{ KV}; V_S = 145 \text{ KV}; P_R = 30 \text{ MW}; \cos \phi_R = 0,98_{(\text{inductivo})}$$



Tensión Base:  $U_b = 132 \text{ KV}$ ; Potencia Base:  $\frac{U_b^2}{|B|} = \frac{132^2}{123,3} = 141,2 \text{ MVA}$

$$v_R = \frac{141}{132} = 1,07 \text{ pu}; \quad v_S = \frac{145}{132} = 1,1 \text{ pu}$$

$$\overline{nO_{R1}} = |A| \cdot v_R^2 = 0,938 \cdot 1,07^2 = 1,075$$

$$\overline{O_{R1} p_{r1}} = \frac{30 \text{ MW}}{141,2 \text{ MVA}} = 0,212; \quad \overline{P_{r1} k_{1r}} = \frac{30 \text{ MW} \cdot \text{tg}\phi}{141,2 \text{ MVA}} = 0,04$$

$$\overline{nk_{1r}} = v_S \cdot v_R = 1,07 \cdot 1,1 = 1,18 \text{ (radio del círculo)}$$

Trazado  $\overline{nk_{1r}}$ , se mide  $\delta$  a partir de la línea de referencia  $\frac{v_R^2}{|B|}$ . Con este mismo

ángulo se puede trazar  $\overline{nk_{1s}} = \overline{nk_{1r}}$ .

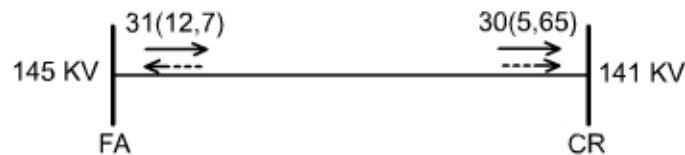
$$\overline{nO_{S1}} = v_S^2 \cdot |D| = 1,1^2 \cdot 0,938 = 1,13 \text{ pu}$$

Teniendo  $O_{S1}$  y  $k_{1s}$  se puede trazar el triángulo  $O_{S1} k_{1s} p_{s1}$  del cual se puede obtener  $P_{S1} + Q_{S1}$  y  $\theta_{S1}$

$$P_{S1} = \overline{O_{S1} p_{S1}} \cdot \frac{U_b^2}{|B|} = 0,22 \cdot 141,2 \approx 31 \text{ MW}$$

$$Q_{S1} = \overline{k_{1s} p_{S1}} \cdot \frac{U_b^2}{|B|} = 0,22 \cdot 141,2 \approx 12,7 \text{ MVAR}_{(\text{capacitivo})}$$

$$\text{tg}\phi_{S1} = \frac{12,7}{31} = 0,41; \quad \cos\phi_{S1} = 0,926_{(\text{capacitivo})}; \quad \delta \approx 11^\circ$$



2)  $V_R = 141 \text{ KV}$ ;  $P_R = 30 \text{ MW}$ ;  $\cos\phi_R = 1$

$$v_R = \frac{141}{132} = 1,07 \text{ pu}; \quad p_R = \overline{O_{R2} k_{r2}} = \frac{30}{141,2} = 0,212 \text{ pu}$$

$$\overline{nO_{R2}} = |A| \cdot v_R^2 = 0,938 \cdot 1,07^2 = 1,075$$

$\overline{nk_{2R}} = v_S \cdot v_R = 1,15 \text{ pu}$  (radio del círculo medido)  $\therefore v_S = \frac{\overline{nk_{2R}}}{v_R} = \frac{1,15}{1,07} \cong 1,074$  y  
 $V_S = 1,074 \cdot 132 \text{ KV} \cong 142 \text{ KV}$ . Trazando  $\overline{nk_{2R}}$  se mide  $\delta' \cong 11,55^\circ$  a partir de la  
 línea de referencia  $\frac{V_S^2}{|B|}$  ( $\overline{nk_{2R}} = \overline{nk_{2S}}$ )

$$\overline{nO_{S2}} = |D| \cdot v_S^2 = 0,938 \cdot 1,074^2 = 1,081$$

En igual forma que en 1), se traza el triángulo  $O_{S2} \overset{\Delta}{k_{2S}} p_{S2}$

$$P_{S2} = \overline{O_{S2}p_{S2}} \cdot \frac{U_b^2}{|B|} = 0,22 \cdot 141,2 \cong 31 \text{ MW}$$

$$Q_{S2} = \overline{k_{2S}p_{S2}} \cdot \frac{U_b^2}{|B|} = 0,11 \cdot 141,2 \cong 15,7 \text{ MVAR}_{(\text{capacitivo})}$$

